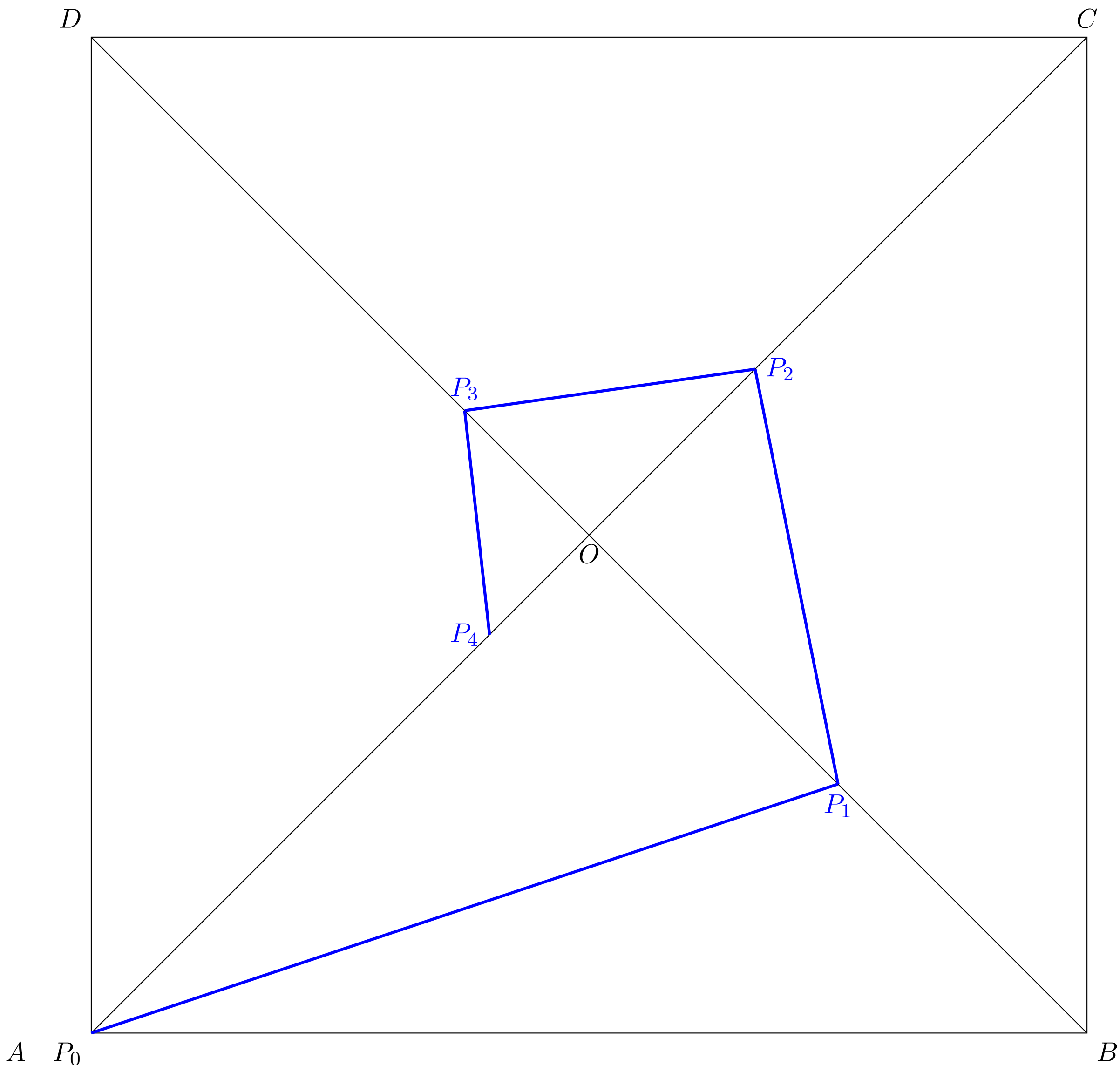
Spirale 2

On considère un carré $ABCD$ de centre O, tel que $OA = 1$.
Soit n un entier naturel ; sur les diagonales $[AC]$ et $[BD)$ on place les points P_0, P_1, P_2, ... , P_n tels que :

- $P_0 = A$
- $P_1 \in [OB]$ et $OP_1 = \dfrac{1}{2}$
- $P_2 \in [OC]$ et $OP_2 = \dfrac{1}{3}$
- $P_3 \in [OD]$ et $OP_3 = \dfrac{1}{4}$
- et ainsi de suite on a pour tout entier naturel $OP_n = \dfrac{1}{n+1}$

Observations graphiques

1. Compléter la figure ci-dessous (l'échelle est de 10cm pour 1).

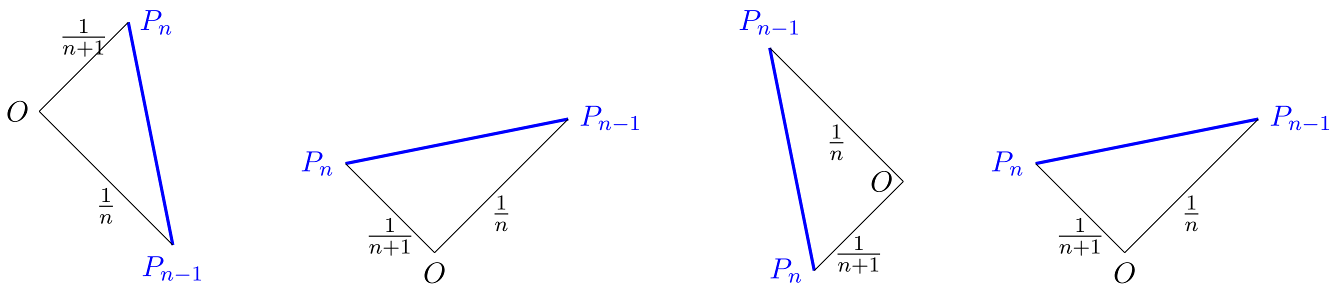


2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec un programme

On considère l'étape n.
Pour étudier la longueur de la spirale on s'intéresse à la suite v_n définie par $v_n = P_{n-1}P_n$ et à la somme de ses termes.

Le triangle $OP_{n-1}P_n$ est un triangle rectangle en O tel que $OP_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ et $OP_n = \dfrac{1}{n+1}$.



En appliquant le théorème de Pythagore, on montre :
$v_n = P_{n-1}P_n = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}}$

En langage Python, on définit les deux fonctions suivantes :

```
from math import *

def v(n):
    return sqrt(1/n**2+1/(n+1)**2)

def spirale(n):
    L=0
    for i in range (1,n+1):
        L=L+v(i)
    return L
```

La fonction v avec le paramètre n renvoie la valeur de v_n ; la fonction spirale avec le paramètre n renvoie la longueur de la spirale à l'étape n.

Tester les fonctions v et spirale avec de très grande valeurs de n.
Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec le calcul algébrique

Dans l'ensemble de l'étude qui suit nous avons considérons n un entier non nul.

On note L_n la longueur de la spirale à l'étape n.
On a $L_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

On a vu que $v_n = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}}$

On a $v_n \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{n^2}}$ or $\sqrt{\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n}$

Ainsi pour tout n, $v_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

On a donc $L_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

Spirales

Nous allons étudier la suite S telle que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$
$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + +\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$
$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$
Le plus petit terme de cette somme est $\frac{1}{2n}$ et il y a n termes dans cette somme donc $S_{2n} - S_n \geqslant n \times \frac{1}{2n}$ ainsi $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
Supposons que la suite S converge vers une limite ℓ.
$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell$ donc $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \ell$ ainsi $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = 0$ ce qui est absurde car on a montré que $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
Ainsi la suite S n'a pas de limite finie et comme est est strictement croissante on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Mais on a vu que $L_n \geqslant S_n$ donc par comparaison des limites $\lim_{n \to +\infty} L_n = +\infty$.

La spirale a une longueur infinie !!!