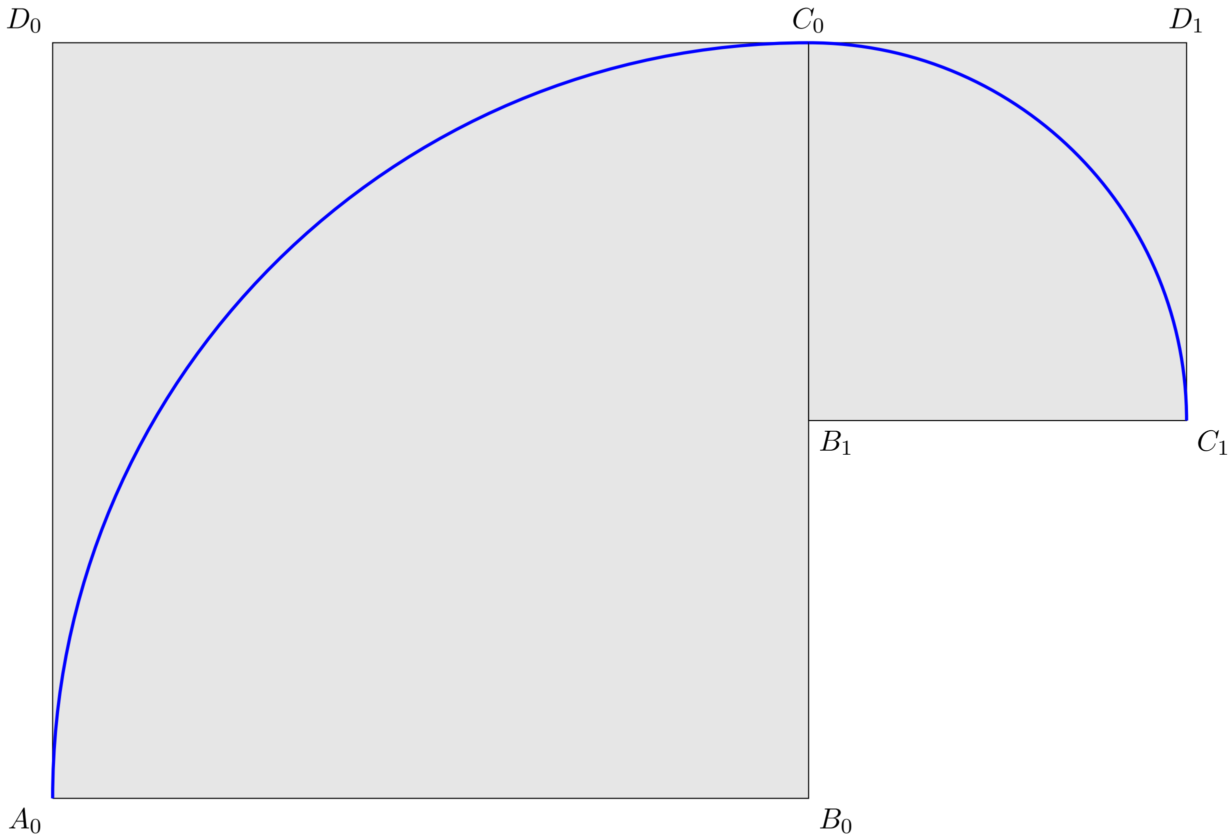
Spirale 1

On considère une figure construite par itération.
On construit un carré $A_0B_0C_0D_0$ de 10 cm de côté.
A l'intérieur du carré, on trace le quart de cercle de centre B_0 et de rayon B_0C_0 (étape 0).
On appelle B_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$ et on trace, à l'extérieur du carré $A_0B_0C_0D_0$, le carré $C_0B_1C_1D_1$ puis le quart de cercle de centre B_1 et de rayon B_1C_1(étape 1).
L'itération du processus donne les carrés : $C_1B_2C_2D_2$, $C_2B_3C_3D_3$ ... et la spirale $A_0C_0C_1C_2C_3$ ...

Observations graphiques

1. Compléter la figure ci-dessous (étape 2 et 3).



2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec un tableur

1. Créer et compléter la feuille de tableur suivante :

	A	B	C	D
1	N° étape	Côté du carré	Ajout à la spirale	Aotal spirale
2	0	10	15,7079633	15,7079633
3	1	5	7,85398163	23,5619449
4	2	2,5	3,92699082	27,4889357
5	3	1,25	1,96349541	29,4524311

2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec le calcul algébrique

1. On note c_n le côté du carré à l'étape n.
   En utilisant la nature de cette suite, justifier que pour tout n, $c_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. On note l_n la longueur de la courbe ajoutée à la spirale à l'étape n.
   Montrer que $l_n = 5\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   On reconnait une suite géométrique, on peut alors montrer que la longueur L_n de la spirale à l'étape n est $L_n = 10\pi\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
3. Quel est la limite de Ln lorsque n tend vers $+\infty$.

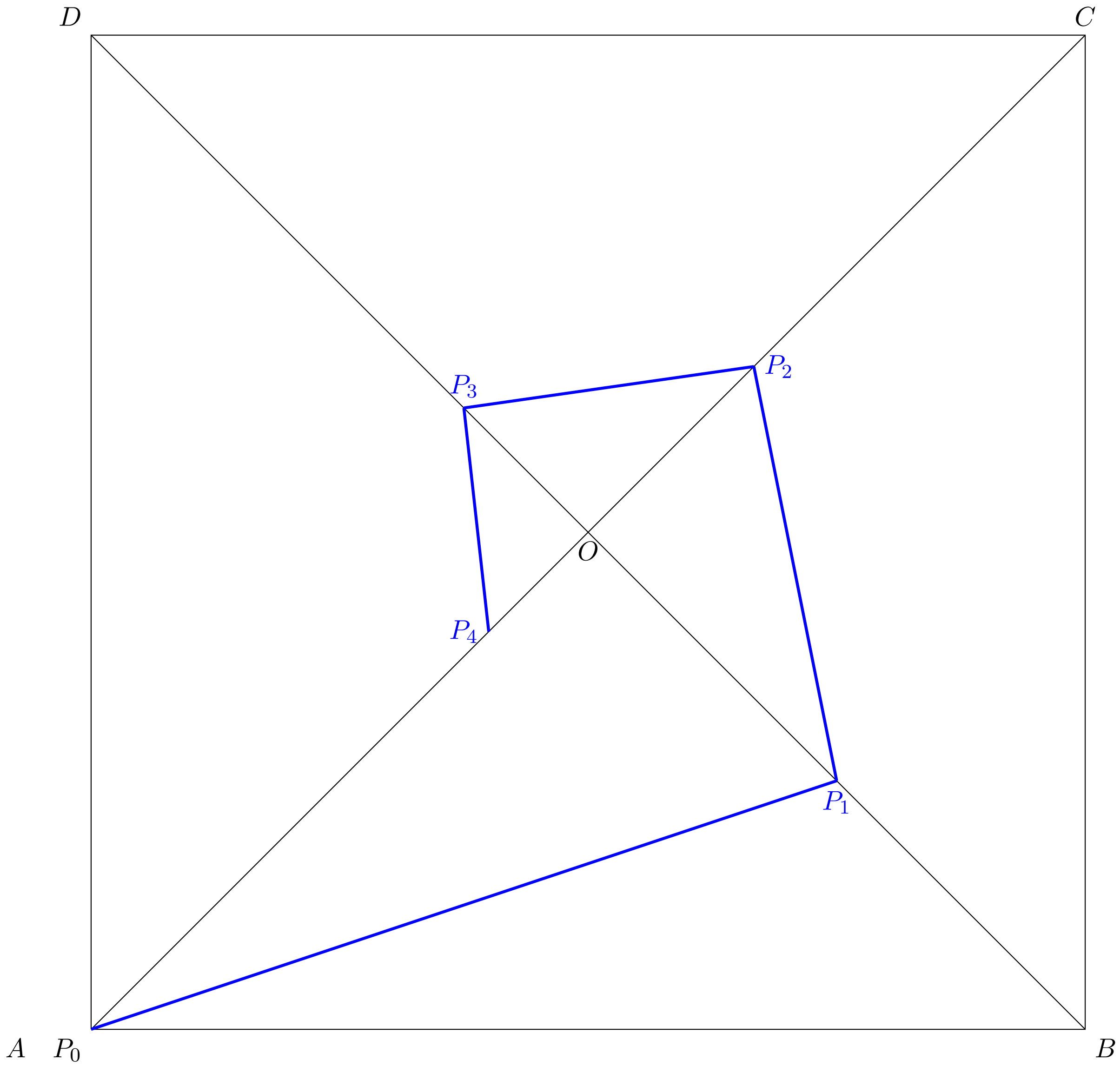
Spirale 2

On considère un carré $ABCD$ de centre O, tel que $OA = 1$.
Soit n un entier naturel ; sur les diagonales $[AC]$ et $[BD)$ on place les points P_0, P_1, P_2, ... , P_n tels que :

- $P_0 = A$
- $P_1 \in [OB]$ et $OP_1 = \frac{1}{2}$
- $P_2 \in [OC]$ et $OP_2 = \frac{1}{3}$
- $P_3 \in [OD]$ et $OP_3 = \frac{1}{4}$
- et ainsi de suite on a pour tout entier naturel $OP_n = \frac{1}{n+1}$

Observations graphiques

1. Compléter la figure ci-dessous (l'échelle est de 10cm pour 1).

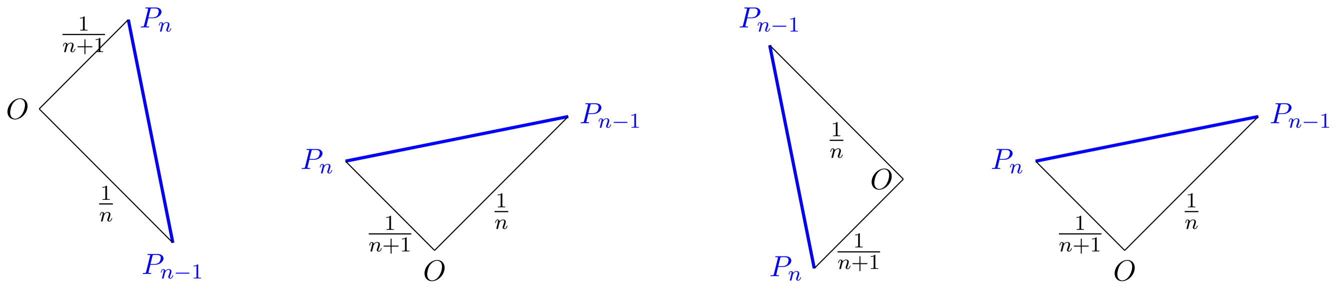


2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec un programme

On considère l'étape n.
Pour étudier la longueur de la spirale on s'intéresse à la suite v_n définie par $v_n = P_{n-1}P_n$ et à la somme de ses termes.

Le triangle $OP_{n-1}P_n$ est un triangle rectangle en O tel que $OP_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ et $OP_n = \dfrac{1}{n+1}$.



En appliquant le théorème de Pythagore, on montre :
$v_n = P_{n-1}P_n = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}}$

En langage Python, on définit les deux fonctions suivantes :

```
from math import *

def v(n):
    return sqrt(1/n**2+1/(n+1)**2)

def spirale(n):
    L=0
    for i in range (1,n+1):
        L=L+v(i)
    return L
```

La fonction v avec le paramètre n renvoie la valeur de v_n ; la fonction spirale avec le paramètre n renvoie la longueur de la spirale à l'étape n.

Tester les fonctions v et spirale avec de très grande valeurs de n.
Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec le calcul algébrique

Dans l'ensemble de l'étude qui suit nous avons considérons n un entier non nul.

On note L_n la longueur de la spirale à l'étape n.
On a $L_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

On a vu que $v_n = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}}$

On a $v_n \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{n^2}}$ or $\sqrt{\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n}$

Ainsi pour tout n, $v_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

On a donc $L_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

Nous allons étudier la suite S telle que $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

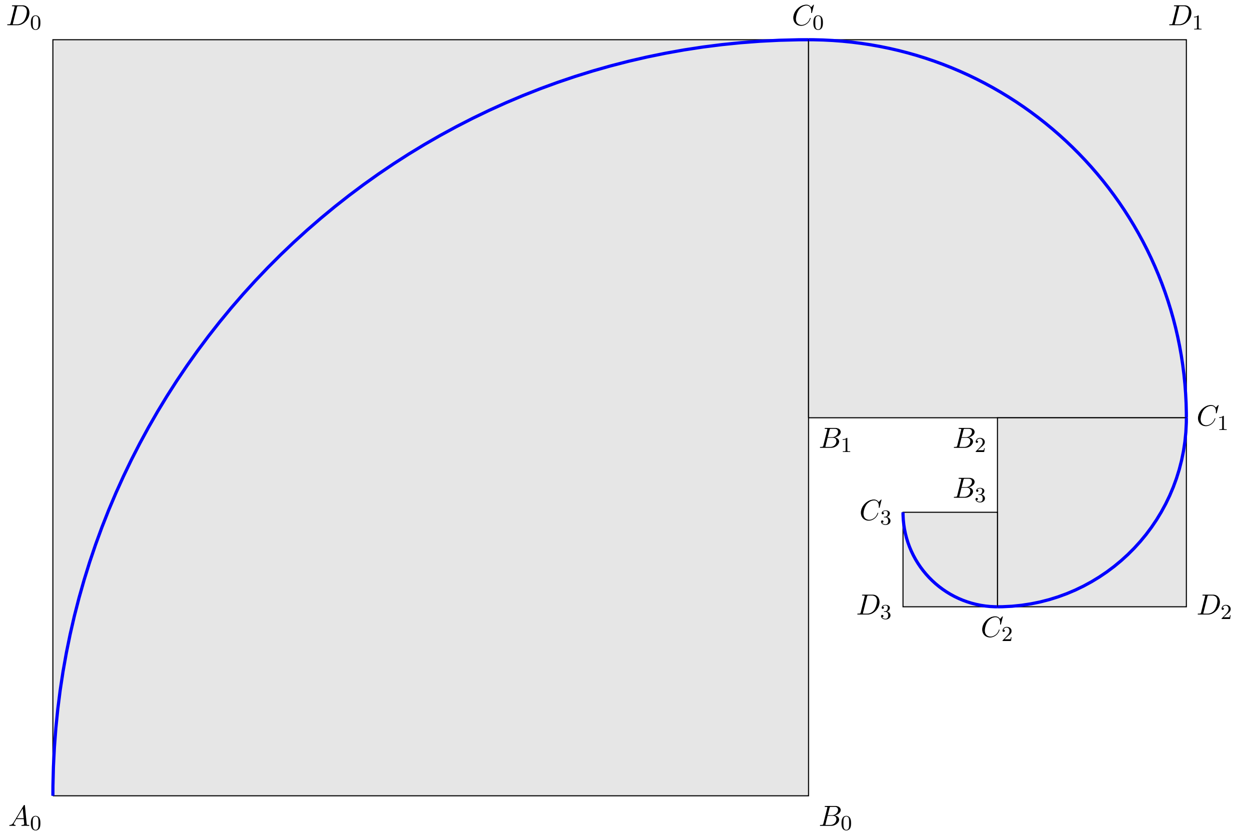
$S_{2n} - S_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$
$S_{2n} - S_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$
$S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$
Le plus petit terme de cette somme est $\dfrac{1}{2n}$ et il y a n termes dans cette somme donc $S_{2n} - S_n \geqslant n \times \dfrac{1}{2n}$ ainsi $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Supposons que la suite S converge vers une limite ℓ.
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \ell$ ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = 0$ ce qui est absurde car on a montré que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Ainsi la suite S n'a pas de limite finie et comme est est strictement croissante on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Mais on a vu que $L_n \geqslant S_n$ donc par comparaison des limites $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = +\infty$.

La spirale a une longueur infinie !!!

Correction spirale 1



A l'étape n **:** la longueur du carré est $10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc la longueur de la spirale est $l_n = 2\pi \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} = 5\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ on reconnait une suite géométrique de premier terme $l_0 = 5\pi$ et de raison $\frac{1}{2}$.

La longueur totale de la spirale à l'étape n est donc :

$$5\pi + 5\pi\left(\frac{1}{2}\right) + 5\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 5\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n = 5\pi\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 5\pi\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 10\pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10\pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 10\pi$

Correction spirale 2