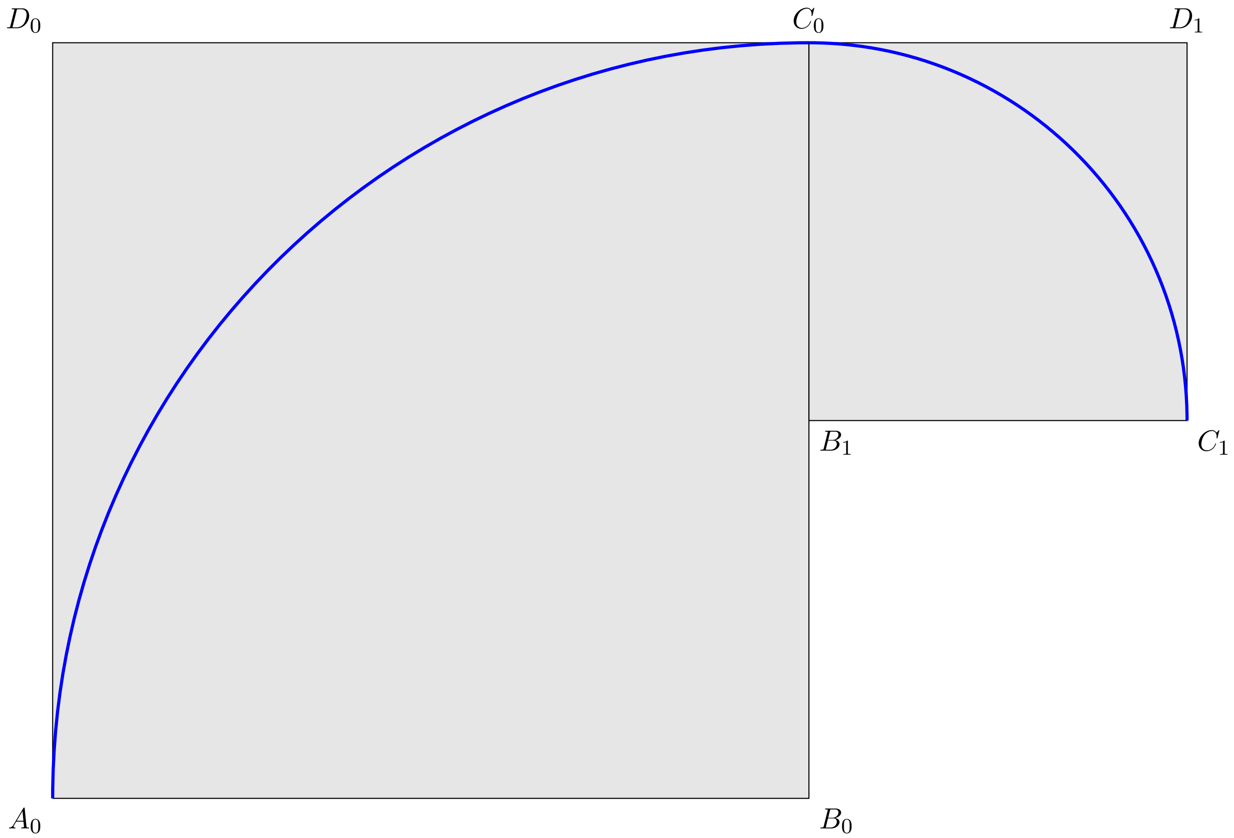
Spirale 1

On considère une figure construite par itération.
On construit un carré $A_0B_0C_0D_0$ de 10 cm de côté.
A l'intérieur du carré, on trace le quart de cercle de centre B_0 et de rayon B_0C_0 (étape 0).
On appelle B_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$ et on trace, à l'extérieur du carré $A_0B_0C_0D_0$, le carré $C_0B_1C_1D_1$ puis le quart de cercle de centre B_1 et de rayon B_1C_1(étape 1).
L'itération du processus donne les carrés : $C_1B_2C_2D_2$, $C_2B_3C_3D_3$ ... et la spirale $A_0C_0C_1C_2C_3$ ...

Observations graphiques

1. Compléter la figure ci-dessous (étape 2 et 3 minimum).



2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Avec un tableur

1. Créer et compléter la feuille de tableur suivante avec automatisation des formules :

	A	B	C	D
1	N° étape	Côté du carré	Ajout à la spirale	Total spirale
2	0	10	15,7079633	15,7079633
3	1	5	7,85398163	23,5619449
4	2	2,5	3,92699082	27,4889357
5	3	1,25	1,96349541	29,4524311

2. Après un nombre infini d'étapes, quelles conjectures pouvez vous émettre sur la longueur ajoutée à la spirale à chaque étape ? sur la longueur de la spirale ?

Spirales

Avec le calcul algébrique

1. On note c_n le côté du carré à l'étape n.
   En utilisant la nature de cette suite, justifier que pour tout n, $c_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. On note l_n la longueur de la courbe ajoutée à la spirale à l'étape n.
   Montrer que $l_n = 5\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   On reconnait une suite géométrique, on peut alors montrer que la longueur L_n de la spirale à l'étape n est $L_n = 10\pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
3. Quelle est la limite de Ln lorsque n tend vers $+\infty$?