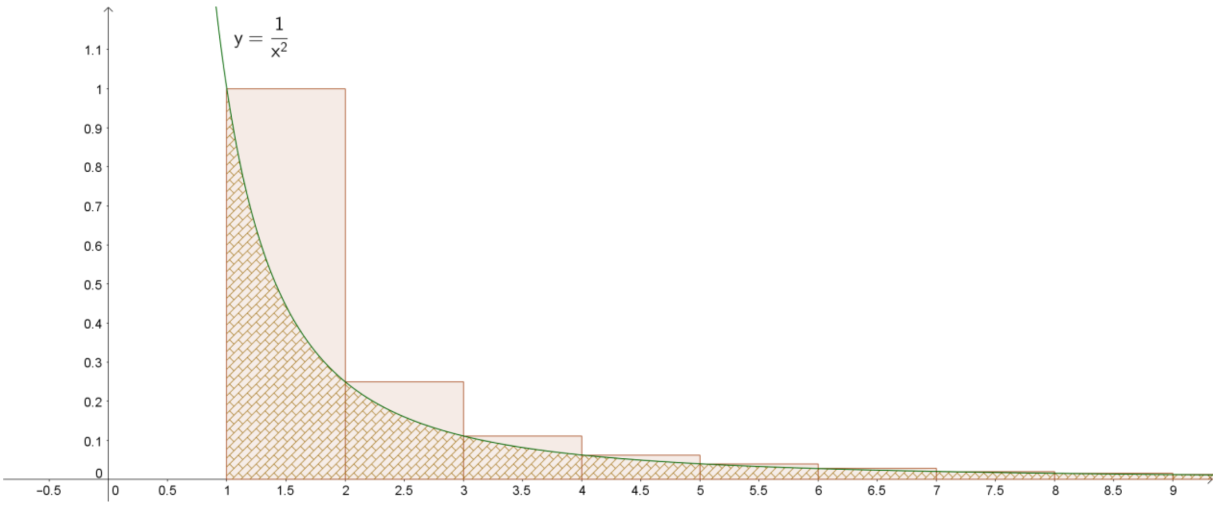
Le mur infini – version 2-

On imagine un mur infini délimité par la courbe représentative de la fonction f définie sur [1 ;+∞[par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Question : Si un peintre recouvre ce mur d'une couche de peinture uniforme, peut-il utiliser un nombre fini de pots de peinture ?

Conjecture 1 : Répondre au problème d'après votre intuition

Pour répondre à cette question, on va considérer un mur construit à l'aide de rectangles ainsi que le suggère la figure ci-dessous, qui sont plus hauts que le mur d'origine.



1) a) Quelle est la hauteur du premier rectangle ? du deuxième ? du troisième ?
   b) En déduire que la surface des rectangles peints est égale à :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

(où n est un entier naturel non nul)
Cette somme est appelée la somme des inverses des carrés.

Conjecture 2 : Répondre au problème en estimant cette somme à l'aide d'un tableur

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$
   b)En déduire que pour tout entier naturel non nul n :
   $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis que $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 1$

   c) En déduire que le peintre a besoin d'un nombre fini de pots de peinture pour couvrir le mur de longueur infinie.

Répondre au problème