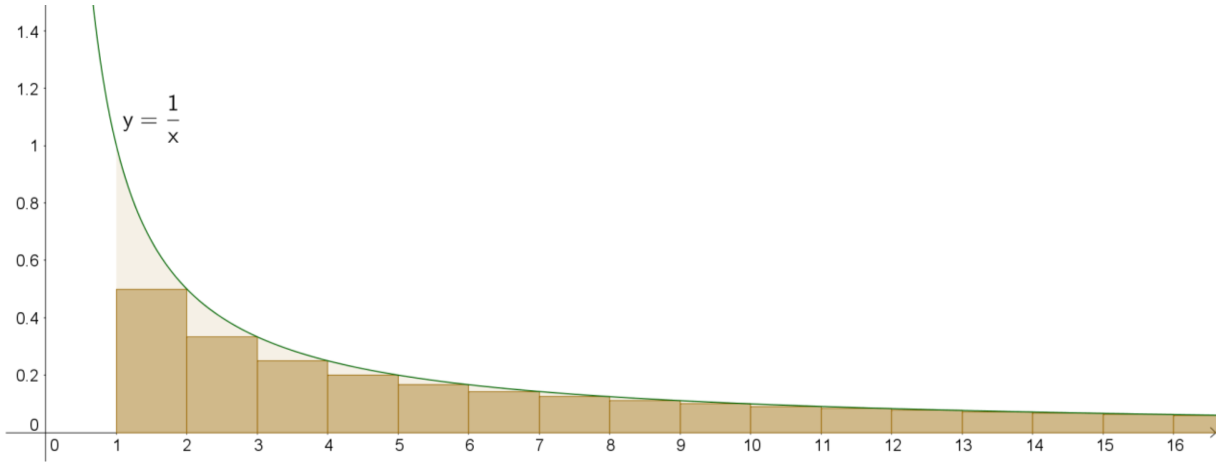
Le mur infini – version 1-

On imagine un mur infini délimité par la courbe représentative de la fonction f définie sur [1 ;+∞[par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Problème : Si un peintre recouvre ce mur d'une couche de peinture uniforme, peut-il utiliser un nombre fini de pots de peinture ?

Conjecture 1 : Répondre au problème d'après votre intuition

Pour répondre à cette question, on va imaginer, que, dans un premier temps, avant de peindre le mur en entier, il peint des rectangles sur le mur comme ci-dessous :



1) a) Quelle est la hauteur du premier rectangle peint ? du deuxième ? du troisième ?
   b) En déduire que la surface des rectangles peints est égale à :
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$
   (où n est un entier naturel non nul)
   Cette somme est appelée la somme des inverses.

Conjecture 2 : Répondre au problème en estimant cette somme à l'aide d'un tableur

2) Pour calculer cette somme, on va regrouper les termes de cette somme en une infinité de « blocs » de la façon suivante :
$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
   a) Montrer que chaque « bloc » est supérieur à $\frac{1}{2}$
   b) En déduire que cette somme ne peut pas être finie.

Répondre au problème