Le mur infini – Le paradoxe du peintre (éléments de correction)

La somme de tous les inverses n'a pas une valeur finie

Contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser, la somme infinie des inverses est de même nature que la somme :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

autrement dit, il ne peut en résulter une quantité finie. Le lien entre ces deux sommes devient apparent si l'on regroupe les termes de la somme des inverses en blocs comme indiqué ci-dessous :

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}^{2\text{ termes}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{4\text{ termes}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}^{8\text{ termes}}+\ldots$$

Les blocs qui suivent regroupent 16 termes, 32 termes, etc. L'intérêt de ces regroupements est que la somme contenue dans chaque bloc est systématiquement plus grande que $\frac{1}{2}$, en effet :

$1+\frac{1}{2}$	supérieur à	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	supérieur à	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	qui font $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	supérieur à	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$	qui font $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$	supérieur à	$\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}$	qui font $\frac{1}{2}$

... et ainsi de suite.

Puisqu'il y a une infinité de blocs, tous supérieurs à $\frac{1}{2}$, la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ ne peut en aucun cas être finie. Il existe de nombreuses règles en mathématiques qui permettent dans certains cas de décider si une somme infinie donne ou non un résultat fini. Malgré cela, l'étude de ces sommes infinies demeure extrêmement délicate ; voici deux résultats qui illustrent la difficulté du sujet. Si l'on raye un terme sur deux de la somme infinie des inverses :

$$\cancel{\frac{1}{1}}+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{5}}+\frac{1}{6}+\cancel{\frac{1}{7}}+\ldots$$

on obtient à nouveau la somme des inverses où chacun des termes serait divisé par deux, et par conséquent la valeur qui en résulte demeure infinie. En revanche, si on élimine *seulement* les fractions où apparaît le chiffre 9 :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cancel{\frac{1}{9}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\cancel{\frac{1}{19}}+\ldots$$

on obtient étonnamment un résultat fini.