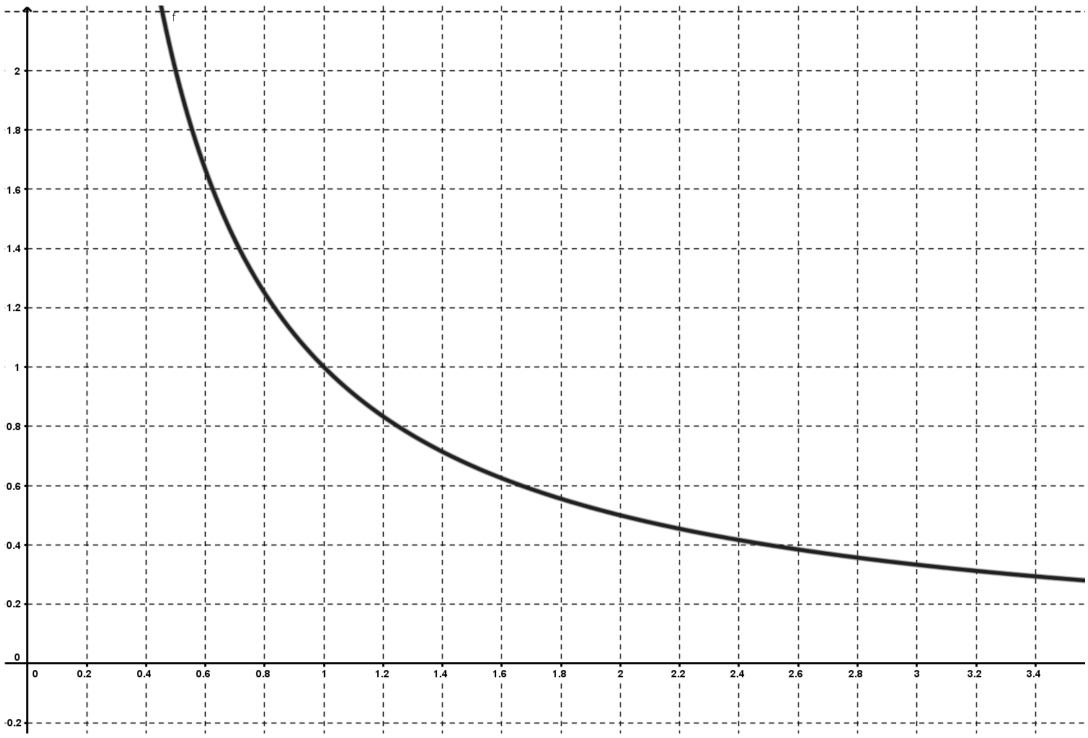
Exercice 1 :
Utilisez la méthode des rectangles sur l'intervalle $[1,2]$ avec une subdivision de largeur 0,2 pour encadrer l'aire sous la courbe représentative de la fonction inverse sur $[1; 2]$. Vous tracerez les rectangles de deux couleurs différentes.



Exercice 2 : En utilisant un calcul d'aire, calculer les intégrales suivantes (vous commencerez par faire un dessin) :

a) $\int_2^3 (x-2)\,dx$

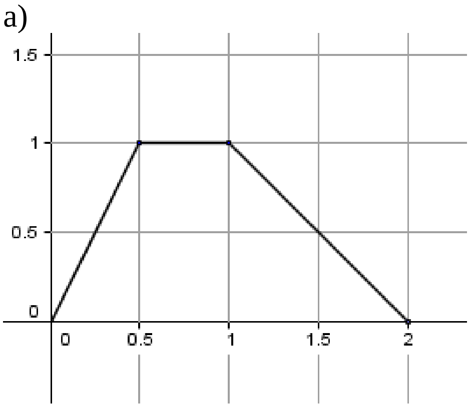
b) $\int_{-7}^{-4} 5\,dx$

c) $\int_{-5}^{3} |x|\,dx$

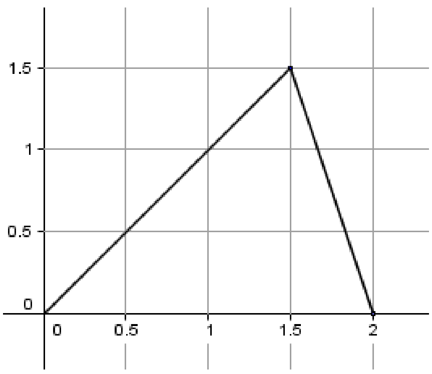
d) $\int_{-3}^{8} |x+2|\,dx$

Exercice 3 : Parmi les fonctions représentées graphiquement ci-dessous, déterminer celles qui définissent une densité de probabilité sur [0 ; 2] (pour les deux premières) ou sur [-1,5 ; 1,5] (pour les deux dernières).

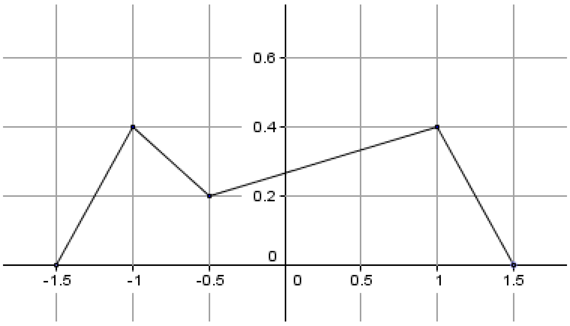
a)



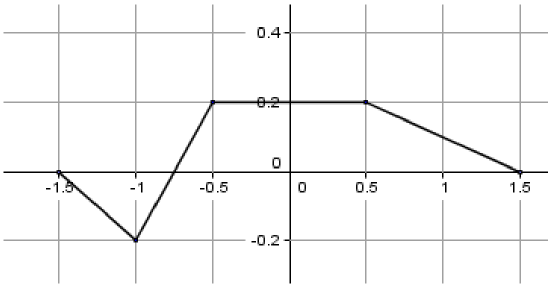
b)



c)



d)



Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(t) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ sur } [0; 2[\\ 0{,}2t - 0{,}2 \text{ sur } [2; 3[\\ -0{,}2t + 1 \text{ sur } [3; 4] \end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.
2) Justifier que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0 ; 4]$.
3) Soit X une variable aléatoire continue qui admet pour fonction de densité la fonction f. Calculer $P(X \in [1 ; 3])$ et $P_{X\in[1;4]}(X \in [2{,}5; 4])$.

Exercice 5 :

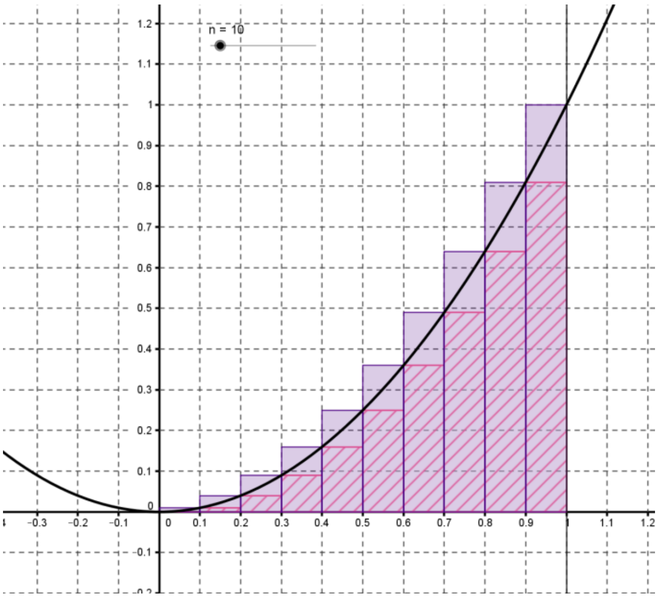
Tous les mercredis matins, un élève dont je tairai le nom[1], arrive au hasard entre 7h15 et 7h35 à l'arrêt de bus. A partir de 7h00, les bus passent exactement[2] toutes les 10 minutes. On appelle X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de cet élève à l'arrêt de bus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité que cet élève attende le bus moins de 5 minutes ?
3. S'il rate le bus de 7h30, cet élève est en retard à son cours de mathématiques. Quelle est la probabilité que cet élève arrive en retard en mathématiques[3] ?

[1] Quoique si vous insistez….
[2] Au pays des mathématiques, les bus passent à l'heure !
[3] Même au pays des mathématiques, les élèves sont en retard…….. Rien n'est parfait !

Exercice 6 : On considère la fonction carrée sur $[0;1]$.On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. Sur chaque subdivision, on construit un « petit » rectangle r (hachuré sur le dessin) et un « grand » rectangle R. L'aire sous la parabole entre 0 et 1 est comprise entre la somme s_n des aires des « petits » rectangles et la somme S_n des aires des « grands » rectangles.

Figure dans le cas n = 10



1. On se place dans le cas où n = 10.

   a) Quelle est l'aire d'un « petit » rectangle r_k de base $\left[\frac{k}{10};\frac{k+1}{10}\right]$ (k *variant de* 0 à 9)? d'un « grand » rectangle R_k ?

   b) Calculer alors s_{10} et S_{10}. En déduire un encadrement de A.

2. **Cas général :** On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$.

   a) Donner l'expression, en fonction de n, des sommes s_n et S_n.

   b) Déterminer les limites des suites (s_n) et (S_n). En déduire la valeur de A.

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables : a, b, h, U et V sont des variables réelles n est une variable entière Entrées : Lire a Lire b Lire n Traitement : Affecter 0 à U Affecter 0 à V Affecter $\frac{b-a}{n}$ à h	Pour k allant de ………. à……………….. faire Affecter $U + h \times (a + k \times h)^2$ à U Affecter $V + h \times (a + (k+1) \times h)^2$ à V Fin de pour Sortie : Afficher U Afficher V	a) Compléter cet algorithme. b) Qu'affiche l'algorithme si on entre $a = 0,\ b = 1\ et\ n = 5$? c) Programmer cet algorithme sur votre calculatrice. Qu'affiche le programme pour $a = 0,\ b = 1\ et\ n = 100$?

Exercice 7 : On considère la fonction $f(x) = e^x$ définie sur $[0;1]$ et C sa courbe dans un repère orthonormé.
On se propose de déterminer un encadrement de l'aire sous la courbe représentative de la fonction f sur [0 ;1] en utilisant la méthode des rectangles.
On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. Sur chaque subdivision, on construit un « petit » rectangle r (hachuré sur le dessin) et un « grand » rectangle R.
L'aire que l'on cherche à calculer, est comprise entre la somme s_n des aires des « petits » rectangles et la somme $S_n$des aires des « grands » rectangles.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $s_n = \frac{1}{n} \times \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$ et $S_n = s_n \times e^{\frac{1}{n}}$

b) Déterminer les limites des suites (s_n) et (S_n). En déduire la valeur de A.

Exercice 8 : Au feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance.
A 12 heures, le feu se met au rouge et un piéton se présente à un instant au hasard entre 12 h et 12h05 pour traverser. On considère la v.a. X égale au temps écoulé en secondes entre 12h et l'instant d'arrivée du piéton.
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité que :
   a) trouve le feu vert et traverse sans attendre ;
   b) n'attende pas le feu vert plus de 15s ;
   c) attende le feu vert plus de 30s.

Exercice 9 : Souvenirs, souvenirs !
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
1. Soit n un entier non nul. Montrer que pour tout $x \in [n; n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$.
3. Pour $\in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \dots \dots . + \frac{1}{n}$.
   Démontrer que : $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq u_n \leq 1 + \int_1^n f(x)dx$.
4. En déduire que la suite (u_n) diverge.