Exemple de synthèse du problème du volcan Aso

Remarque : Cette synthèse n'a pas vocation à être un modèle. Elle a été construite par une enseignante à partir de ce qui s'est passé dans sa classe. Attention, l'énoncé du problème évolue au cours des années en fonction notamment des nouvelles éruptions volcaniques, il est donc possible que la synthèse ne colle pas exactement à l'énoncé disponible sur le site.

Synthèse

Pour la question a), il faut calculer la probabilité que le temps d'attente soit inférieur ou égal à 5 ans. Nous calculons la somme des effectifs des valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5, nous trouvons 89. La fréquence d'un temps d'attente inférieure à 5 ans est $\frac{89}{131} \approx 0.68\ au\ centième\ près$. On pourrait alors évaluer la probabilité demandée par 0,68.

La question b), revient à calculer la probabilité que le temps d'attente soit compris entre $14+\frac{92}{365}$ et $15+\frac{92}{365}$. N'ayant pas de données suffisantes, nous décidons de construire un histogramme.
Notre objectif étant alors de déterminer la courbe de tendance et de calculer l'aire sous la courbe de tendance entre $14+\frac{92}{365}$ et $15+\frac{92}{365}$.
Il est utile ici de préciser qu'implicitement nous considérons l'éruption d'un volcan comme une expérience aléatoire et que nous définissons la v.a. Δt égale au temps d'attente entre deux éruptions successives.
Cette variable aléatoire prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0; +\infty[$. C'est une **variable aléatoire continue.**
Pour construire l'histogramme, nous choisissons l'amplitude des classes pas nécessairement toutes égales et nous calculons la densité de fréquence de chaque classe. Le professeur distribue un histogramme réalisé par M. Josse. Il nous faut pour poursuivre déterminer l'équation de la courbe de tendance. Nous notons f la fonction que représente la courbe de tendance. Nous décidons de définir f sur $[0; +\infty[$.
Nous savons que f doit vérifier 3 critères :

- f doit être positive et continue sur $[0; +\infty[$;
- L'aire sous la courbe sur $[0; +\infty[$ doit être égale à 1.

Des élèves proposent au professeur différentes fonctions et nous testons avec un logiciel l'adéquation à l'histogramme et la valeur de l'aire sous la courbe (Enfin, la vidéoprojecteur nous ayant lâcher, on a un peu galérer !). Après des essais infructueux, est proposée une exponentielle décroissante : nous retenons $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$. Nous aurions pu en retenir une autre. Nous vérifions que f est définie et positive sur $[0; +\infty[$. Nous admettons pour l'instant que l'aire sous sa courbe sur $[0; +\infty[$est égale à 1.
Il nous reste donc à calculer l'aire sous cette courbe entre $14+\frac{92}{365}$ et $15+\frac{92}{365}$. Nous nous apercevons que nous tombons alors sur un nouveau problème à savoir comment calculer l'aire sous la courbe d'une fonction qui n'est pas affine. Très courageusement, nous décidons de nous attaquer à ce problème (là, je m'emballe ! En fait, la prof ne nous a pas laissé le choix parce que nous on aurait bien fait une longue pause !).

Nous devons trouver une méthode pour évaluer l'aire sous la courbe de la fonction définie par $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$ sur l'intervalle $[0; 20]$. Nous pourrons alors utiliser notre méthode pour calculer la probabilité cherchée.

Nous travaillons pour résoudre ce problème avec la fonction carré sur [0 ;1]. Après un certain temps de recherche, nous avons proposé différentes méthodes qui donnent soit un encadrement de l'aire cherchée soit une valeur approchée.
Méthode 1 : On compte les carreaux en-dessous et au-dessous.
Méthode 2 : On découpe la surface en surface polygonale dont nous savons calculée l'aire en utilisant les

tangentes à la courbe.
Méthode 3 : Nous subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en sous intervalles et sur chaque subdivision, on construit des rectangles dont on calcule l'aire. Nous effectuons le calcul en subdivisant en 5 intervalles et nous pouvons proposer un encadrement de l'aire A sous la parabole : $0,24 < A < 0,44$.
Avec un logiciel, nous obtenons :

Pour n=100 : $0,32835 < A < 0,33835$

Pour n=1 000 : $0,33283 < A < 0,33383$