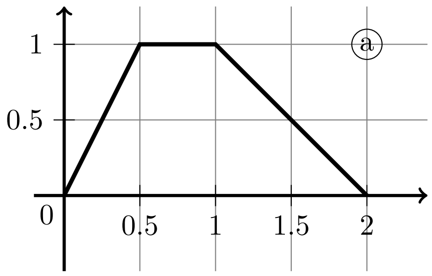
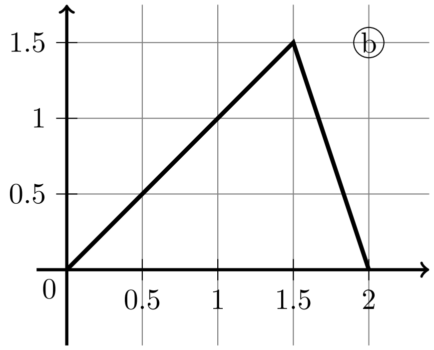
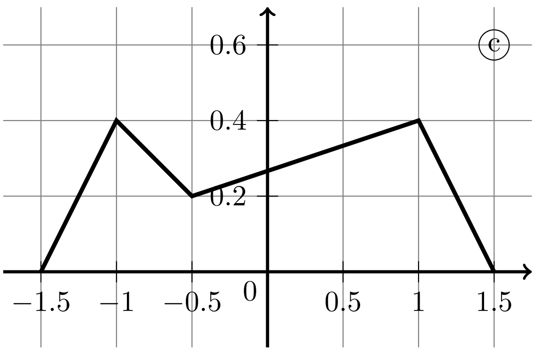
Exercices complémentaires

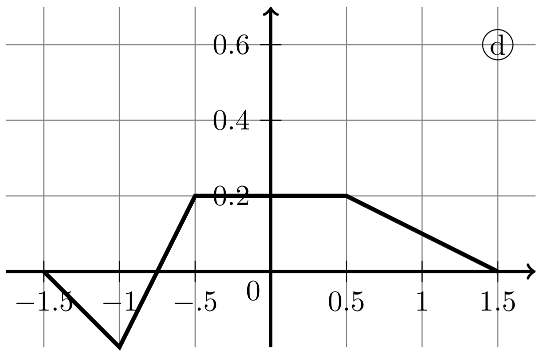
Exercice 1. ....

Parmi les fonctions représentées graphiquement ci-dessous, déterminer celles qui définissent une fonction de densité sur [0 ; 2] (pour les deux premières) ou sur [-1,5 ; 1,5] (pour les deux dernières).
On pourra utiliser geogebra pour les calculs d'aire.









Correction :

Courbe ⓐ
La fonction f représentée par la courbe ⓐ est continue et positive sur $[0; 2]$.
L'aire sous la courbe est égale à $\mathscr{A} = \dfrac{0,5+2}{2} = 1,25 \neq 1$.
La fonction f n'est pas une fonction de densité sur $[0; 2]$.

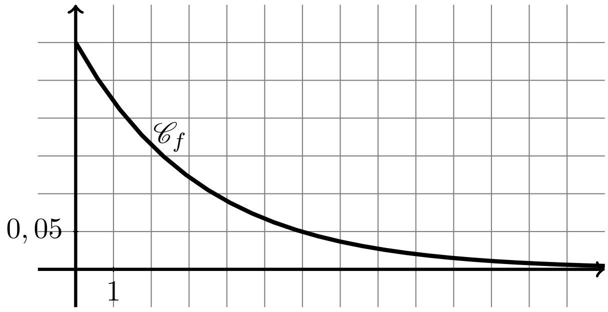
Courbe ⓑ
La fonction g représentée par la courbe ⓑ est continue et positive sur $[0; 2]$.
L'aire sous la courbe est égale à $\mathscr{A} = \dfrac{2 \times 1,5}{2} = 1,5 \neq 1$.
La fonction g n'est pas une fonction de densité sur $[0; 2]$.

Courbe ⓒ
La fonction h représentée par la courbe ⓒ est continue et positive sur $[-1,5; 1,5]$.
L'aire sous la courbe est égale à $\mathscr{A} = 0,8$.
La fonction h n'est pas une fonction de densité sur $[-1,5; 1,5]$.

Courbe ⓓ
La fonction k représentée par la courbe ⓓ n'est pas positive sur $[-1,5; 1,5]$ donc elle ne représente pas une fonction de densité sur $[-1,5; 1,5]$.

Exercice. 55 p 245 ....

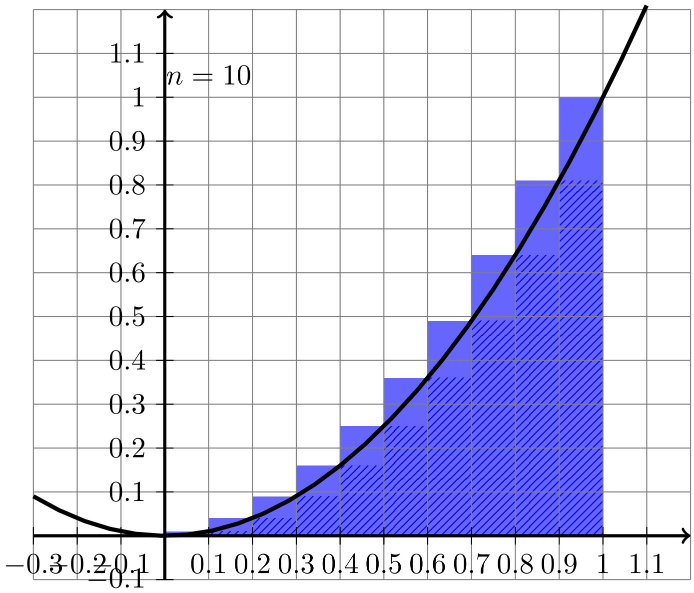
Voici la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une densité de probabilité f d'un loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$


$\mathscr{C}_f$
0,05
1

Exercice 2. ....

On considère la fonction carrée sur $[0;1]$.

On subdivise l'intervalle en n intervalles de même longueur $\dfrac{1}{n}$.
Sur chaque subdivision, on construit un « petit » rectangle r (hachuré sur le dessin) et un « grand » rectangle R.
$\mathscr{A}$, l'aire sous la parabole entre 0 et 1 est comprise entre la somme s_n des aires des « petits » rectangles et la somme S_n des aires des « grands » rectangles.



1. On se place dans le cas où $n = 10$.
   (a) Quelle est l'aire d'un « petit » rectangle r_k de base $\left[\dfrac{k}{10}; \dfrac{k+1}{10}\right]$ (k variant de 0 à 9) ? d'un « grand » rectangle R_k ?
   (b) Calculer alors s_{10} et S_{10}. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
2. Cas général : On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, des sommes s_n et S_n.
   (b) Déterminer les limites des suites (s_n) et (S_n). En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.
   On pourra utiliser $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
def EncadAire(a,b,n):
  u=0
  v=0
  h=(b-a)/n
  for k in range(...,...):
    u=u+h*(a+k*h)**2
    v=v+h*(a+(k+1)*h)**2
  return(u,v)
```

   (a) Compléter cet algorithme.
   (b) Qu'affiche l'algorithme si on saisi EncadAire(0,1,5) ?

(c) Programmer cet algorithme. Qu'affiche le programme pour EncadAire(0,1,100) ?

4. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale.

Correction :

1. On se place dans le cas où $n = 10$.

   (a) Un « petit » rectangle r_k de base $\left[\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10}\right]$ (k variant de 0 à 9) a pour largeur $\frac{1}{10}$ et pour hauteur $\left(\frac{k}{10}\right)^2$ donc son aire est $\frac{1}{10} \times \frac{k^2}{100} = \frac{k^2}{1000}$
   Un « grand » rectangle R_k de base $\left[\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10}\right]$ (k variant de 0 à 9) a pour largeur $\frac{1}{10}$ et pour hauteur $\left(\frac{k+1}{10}\right)^2$ donc son aire est $\frac{1}{10} \times \frac{k^2}{100} = \frac{(k+1)^2}{1000}$.

   (b) On a donc :
   $s_{10} = \frac{1}{1000} + \frac{4}{1000} + \ldots + \frac{81}{1000} = \frac{285}{1000} = 0,285$
   $S_{10} = \frac{1}{1000} + \frac{4}{1000} + \ldots + \frac{100}{1000} = \frac{385}{1000} = 0,385$
   Donc $0,285 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,385$.

2. Cas général : On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$.

   (a) Un « petit » rectangle r_k de base $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ (k variant de 0 à $n-1$) a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ donc son aire est $\frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{n^3}$ donc
   $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}}{n^3} = \frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$.
   Un « grand » rectangle r_k de base $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ (k variant de 0 à $n-1$) a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour hauteur $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$ donc son aire est $\frac{1}{n} \times \frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{(k+1)^2}{n^3}$ donc
   $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$.

   (b) On a $\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{3}$.
   On a $\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.
   Comme $s_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_n$ on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A} = \frac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```python
def EncadAire(a,b,n):
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
```

```
    for k in range(0,n):
        u=u+h*(a+k*h)**2
        v=v+h*(a+(k+1)*h)**2
    return(u,v)
```

(a) Compléter cet algorithme.

(b) Si on saisi EncadAire(0,1,5) on a en sortie $(0,24;0,44)$

(c) Si on saisi EncadAire(0,100,5) on a en sortie $(0,32835;0,33835)$

4. On $\mathscr{A} = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.