

Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

## Tâche 1 : “Pétition contre une nouvelle loi”

Le parti espagnol d'opposition a récemment présenté au Congrès, le 25 avril 2006, 4 millions de signatures contre une nouvelle loi soutenue par le gouvernement.



Tous les journaux espagnols ont publié des photos des grandes caisses et des 10 camionnettes nécessaires pour transporter les feuilles de papier au Congrès. Pensez-vous qu'il y avait une intention politique derrière cette mise en scène ou bien croyez-vous que toutes ces caisses et ces camionnettes étaient vraiment nécessaires pour transporter ces 4 millions de signatures?

Modélisation

\*

## Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

### Tâche 2 : “Battement du cœur”

Pour des raisons de santé, il faut limiter ses efforts, comme par ex. en sport, afin que la fréquence cardiaque ne dépasse pas un certain seuil.

Longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée pour une personne et son âge était donnée par la formule suivante :

**Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge**

Des études récentes ont montré qu'il fallait légèrement modifier cette formule. On obtient ainsi la nouvelle formule :

**Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0,7 x âge)**

Un article de journal déclarait : *“En utilisant la nouvelle formule à la place de l'ancienne, on voit que le nombre maximum recommandé de battements du cœur par minute diminue légèrement pour les personnes jeunes alors qu'il augmente un peu pour les personnes âgées.”*

À partir de quel âge voit-on une augmentation de la fréquence cardiaque maximum recommandée selon la nouvelle formule ? Présentez votre travail.

Extrait de : [www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf](http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf)

Modélisation

\*

Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

## Tâche 3 : Festival de musique



Le **Festival des arts du spectacle de Glastonbury** est le plus grand festival de musique et d'arts du spectacle au monde en pleine nature. En 2005, le festival recouvrait une zone clôturée de plus de 3,6 km<sup>2</sup> et comptait plus de 385 spectacles en direct. Beaucoup de festivaliers viennent avec leurs propres tentes pour dormir à l'intérieur de la zone du festival.

Les organisateurs doivent limiter le nombre de billets et le nombre de tentes autorisées pour garantir la sécurité. Quel conseil pourriez-vous donner ?

Photo : remerciements à Logan 1138, publié sur Wikimedia Commons

Modélisation

\*

Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

## Tâche 4 : Gaz naturel

En 1993, les réserves mondiales de gaz naturel étaient estimées à 141,8 milliards de mètres cubes. Depuis cette date, on a utilisé chaque année en moyenne 2,5 milliards de mètres cubes. Calculez à quelle date les réserves de gaz naturel seront épuisées. Utilisez différentes hypothèses et modèles. Expliquez toutes vos étapes.



Photo : Remerciements à Stan Shebs, publié sur Wikimedia Commons  
Tâche : © 2007 Cornelsen Verlag Scriptor - Mathematisches Modellieren

Modélisation

\*

Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

## Tâche 5 : Œufs de Pâques

Danielle a trouvé 23 œufs.  
Elle a un large sourire car elle a trouvé neuf œufs de plus que Chris. Jennie sourit encore plus. Elle a trouvé exactement autant d'œufs que Chris et Danielle réunis.  
Comment d'œufs a trouvé Jennie ?



Modélisation

\*

Qu'est ce que la modélisation ?

Pourquoi modéliser ?

## Tâche 6 : Les voisins



À votre avis, combien de gens habitent dans cet immeuble ?



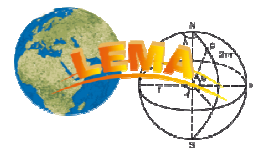
Étiquettes des sonnettes dans le hall d'entrée :



Photo : © Cornelsen Verlag Scriptor · Mathematikunterricht weiterentwickeln

Modélisation

\*



## TÂCHE

Contexte	Connaissances mathématiques
Solutions	Activité du résolveur



### Lignes directrices de réflexion

Concernant le contexte de la tâche :

- Est-il réel ? Est-il authentique ? Ou est-ce une reproduction plus ou moins déformée d'un morceau de réalité à des fins uniquement didactiques?
- Présente-t-il un intérêt pour les élèves ? Est-il en rapport avec leur existence (vie quotidienne, démocratique, critique, professionnelle) ?

Concernant les connaissances mathématiques utilisées :

- Sont-elles totalement déterminées ? Est-il possible d'utiliser différents éléments de connaissance mathématique (qui pourraient même appartenir à différents domaines mathématiques) ?

Concernant les solutions prévues :

- Combien de solutions a-t-on prévu ?
- Quelle est la nature de la solution ou des solutions prévues ? Un nombre, une mesure, une courbe, une expression algébrique, un graphique ?
- Jusqu'à quel point la relation entre la solution obtenue et le point de départ est-elle importante ?

Concernant l'activité du résolveur :

- Est-il exigé du résolveur qu'il exécute une procédure donnée d'avance, une sorte de "manière optimale" de résoudre la tâche ? Ou bien est-il exigé du résolveur qu'il explore la situation, établisse différentes manières de travailler, recherche de nouvelles questions, interprète et valide ses solutions ?



	Contexte	Connaissances mathématiques	Solutions	Activité du résolveur
TÂCHE 1				
TÂCHE 2				
TÂCHE 3				
TÂCHE 4				
TÂCHE 5				
TÂCHE 6				

Cette ressource donne des suggestions sur la façon dont on pourrait tenter de résoudre les tâches contenues dans ce module.

## Tâche 1: " Pétition contre une nouvelle loi"

Essayez de calculer approximativement le volume occupé par les feuilles de papier contenant les signatures. Les hypothèses doivent être faites sur le nombre de signatures par feuille, et si les deux côtés de chaque feuille sont utilisés ou non.

Par exemple: 10 signatures par feuille sur un côté seulement demande  $4.000.000 \div 10 = 400\ 000$  feuilles.



Le type boîte contenant 2500 feuilles de papier peut être utilisé (les mesures sont approximatives):

$$31\text{ cm} \times 23\text{ cm} \times 25\text{ cm} = 25000\text{ cm}^3 = 0,025\text{ m}^3$$

Cela signifie que  $400.000 \div 2500 = 160$  boîtes sont nécessaires, occupant environ:  $160 \times 0.025 = 4\text{ m}^3$

Enfin, nous avons besoin de connaître la capacité de chaque camionnette. Cette information peut être trouvée sur le site web d'une entreprise de location de camionnette.

En conséquence, une camionnette est suffisante pour porter les signatures au congrès.



En considérant que l'estimation basse du nombre de signatures par feuille de papier, il semble que 10 camionnettes ne sont pas nécessaires.

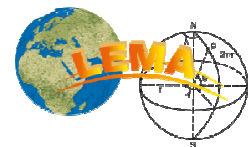
## Tâche 2: "Battement du coeur"

Deux fonctions qui décrivent la relation entre l'âge,  $x$ , et de la fréquence cardiaque maximale recommandée (MRHR) sont données :

$$MRHR_{old}(x) = 220 - x \quad \text{vs.} \quad MRHR_{new}(x) = 208 - 0,7x$$

L'âge après laquelle la nouvelle formule donne une plus grande fréquence cardiaque maximale recommandée (MRHR) doit être trouvé.

## Ressource M.1.5



Une solution algébrique est :

$$\text{age } x / MRHR_{new}(x) > MRHR_{old}(x)$$

$$\text{age } x / 208 - 0,7x > 220 - x$$

$$\text{age } x / 0,3x > 12$$

$$\text{age } x / x > \frac{12}{0,3} \rightarrow \boxed{x > 40}$$

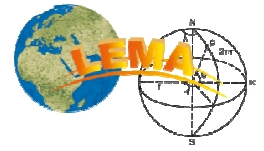
A partir de 40 ans la nouvelle formule recommande une plus grande fréquence cardiaque maximale que l'ancienne.

Autre solution Une approche numérique pourraient être prises. La fréquence cardiaque maximale recommandée de chaque formule peut être calculée en utilisant une feuille de calcul.

Les données montrent que, à l'âge de 40 ans, la fréquence cardiaque maximale recommandée par chaque formule la même.

Et à partir de 40 ans, la nouvelle formule donne un taux plus élevé que l'ancienne.

A G E	M R H R n e w	M R H R o l d
10	201	210
11	200,3	209
12	199,6	208
13	198,9	207
14	198,2	206
15	197,5	205
16	196,8	204
17	196,1	203
18	195,4	202
19	194,7	201
20	194	200
21	193,3	199
22	192,6	198
23	191,9	197
24	191,2	196
25	190,5	195
26	189,8	194
27	189,1	193
28	188,4	192
29	187,7	191
30	187	190
31	186,3	189
32	185,6	188
33	184,9	187
34	184,2	186
35	183,5	185
36	182,8	184
37	182,1	183
38	181,4	182
39	180,7	181
40	180	180
41	179,3	179
42	178,6	178
43	177,9	177
44	177,2	176
45	176,5	175
46	175,8	174
47	175,1	173
48	174,4	172
49	173,7	171



### Tâche 3: "Festival de musique"

Il s'agit d'une tâche très ouverte. Beaucoup d'hypothèses doivent être faites pour s'assurer que la tâche soit suffisamment simple à traiter.

On peut faire une simplification en faisant une distinction entre l'utilisation des différentes zones du festival :

- Zone des équipements généraux (entrée, scènes, camions, services médicaux, bars en plein air, services de sécurité, WC, etc.),
- Zone où les gens sont debout pour écouter les concerts,
- Zone où les tentes de camping seront placées,
- Autre zone : allées, arbres ...

Un pourcentage doit être affecté à chaque zone : par exemple, on peut estimer que 50 % peuvent être affectés au gens debout et à leurs tentes et que les autres 50 % sont destinés aux équipements généraux, allées, arbres ... Ce qui signifie donc que 1.800.000 mètres carrés sont disponibles pour le public.

Sur la base de ces données, il faut prendre de nouvelles décisions concernant l'espace nécessaire pour les tentes et l'espace nécessaire pour participer aux concerts. Par exemple, il peut être raisonnable d'affecter 1 m<sup>2</sup> par personne assistant à un concert bien que la réglementation de sécurité puisse suggérer une surface plus grande. Il est aussi nécessaire de calculer la zone occupée par une tente (les pages Internet des fabricants de tentes suggèrent que la superficie occupée par une tente pour deux personnes est de 5 à 6 m<sup>2</sup> mais il faut considérer également l'espace entre les tentes. Dix mètres carrés par tente semble être une bonne estimation). Pour finir, on peut estimer que toutes les personnes assistant au festival utiliseront des tentes pour dormir (ce qui ne sera probablement pas le cas mais les organisateurs doivent s'y préparer le cas échéant).

Ces approximations et simplifications de la situation faites, une façon de procéder est de définir un nombre hypothétique de billets (par exemple 150.000 – le nombre vendu en 2005) et de calculer la zone nécessaire :

- Pour les concerts : 150.000 m<sup>2</sup>
- Pour les tentes :
  - En cas de simple utilisation :  $10 \text{ m}^2 * 150.000 = 1.500.000 \text{ m}^2$
  - En cas de double utilisation : 750.000 m<sup>2</sup>

Il en découle que les hypothèses que nous avons faites doivent être révisées de façon à confirmer cette estimation ou bien le nombre de billets vendus doit être augmenté.



## Tâche 4 : "Gaz naturel"

Pour résoudre cette tâche, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la consommation de gaz. L'approche la plus simple est d'estimer que la consommation est constante sur une longue période. Néanmoins, on peut considérer différents taux de consommation pour différentes périodes.

En traitant le premier cas, on peut considérer différentes approches. Selon la compétence mathématique, une simulation arithmétique (avec ou sans l'utilisation d'une feuille de calcul) ou une approche algébrique peut être utilisée. Dans les deux cas, des représentations graphiques peuvent être utiles pour comparer la consommation de gaz en fonction du temps. Un modélisateur plus sophistiqué pourrait utiliser des paramètres pour contrôler et modifier la consommation de gaz en fonction des résultats fournis par le modèle.

Exemples :

- Consommation égale (2500 milliards de mètres cubes) chaque année :
  - Modèle arithmétique :  $141,8 \div 2,5 = 56,72 \rightarrow$  Il y a du gaz pour les 56 prochaines années  $\rightarrow$  En 2050, les réserves naturelles de gaz seront épuisées (sauf si de nouvelles réserves sont découvertes).
  - Modèle algébrique : si  $x$  est le nombre d'années depuis 1993 et  $G(x)$  la quantité de gaz restant dans les réserves, alors :  $G(x) = 141,8 - 2,5x$ . Les réserves seront épuisées lorsque  $G(x) = 0 \rightarrow x = \frac{141,8}{2,5} = 56,72$ .. Et donc dans 57 années, à partir de 1993, les réserves naturelles de gaz seront épuisées (sauf si de nouvelles réserves sont découvertes).

- Augmentation de la consommation (+10 %) chaque année :

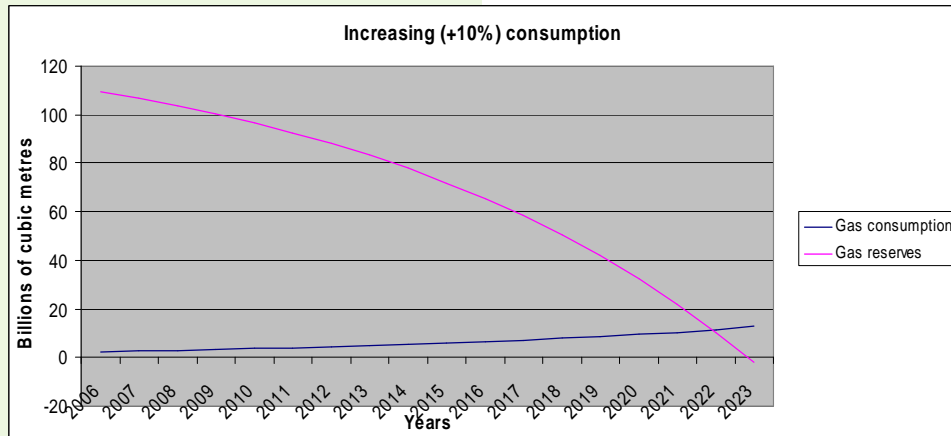
- Modèle arithmétique (en utilisant une feuille de calcul) :

	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Consumption	2,5	2,75	3,025	3,3275	3,66025	4,02628	4,4289	4,87179	5,35897	5,89487	6,48436
Reserves	109,3	106,55	103,525	100,198	96,5373	92,511	88,0821	83,2103	77,8513	71,9564	65,4721

- Modèle algébrique : si  $x$  est le nombre d'années écoulées depuis 2006 et  $G(x)$  la quantité de gaz restant dans les réserves, alors :

$$G(x) = 109,3 - 2,5 \cdot \frac{1,1^{x+1} - 1}{1,1 - 1}$$

- Modèle graphique :



## Tâche 5 : "Œufs de Pâques"

Danielle a trouvé 23 œufs. Elle a trouvé neuf œufs de plus que Chris → Chris a trouvé  $23 + 9 = 14$  œufs.

Jennie a trouvé autant d'œufs que Chris et Danielle réunis → Jennie a trouvé :  $23 + 14 = 37$  œufs.

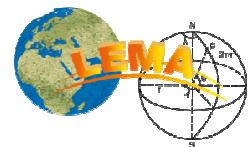
## Tâche 6 : "Les voisins"

Les seules données disponibles sont qu'il existe 8 étages dans l'immeuble. Au delà de ceci, il faut faire des hypothèses pour simplifier et structurer la situation. Trouver un intervalle dans lequel se trouve le nombre de personnes dans l'immeuble est peut-être une meilleure approche que de trouver une seule solution.

L'illustration montre une structure régulière géométrique représentant l'immeuble. Il est peut-être raisonnable de supposer qu'il y a 4 appartements par étage. Il y a donc en tout 32 appartements.

Partant de cette base, il pourrait être utile d'avoir d'autres informations sur la localisation du bâtiment. Par exemple, s'il s'agit d'une zone où les appartements sont normalement très occupés ou d'une zone avec énormément d'appartements vides. Ou bien la structure sociale de la zone peut être importante : Par exemple, s'il y a des personnes jeunes, des personnes âgées, des jeunes familles, des immigrants... D'autres informations sociales, telles que le nombre plausible d'individus dans une famille ou le pourcentage de personnes vivant seules, peuvent être aussi utiles et trouvées sur Internet.

L'estimation la plus faible peut être de 0. La plus élevée est plus difficile mais il n'est pas inhabituel que 6 à 8 personnes vivent dans un appartement (grande famille) : Ce qui conduit à un chiffre compris entre 192 et 256 personnes.



Une estimation réaliste doit inclure des personnes vivant seules (1 personne), des jeunes familles (sans enfant) ou des vieilles familles (les fils et (ou) filles ne vivant plus avec les parents) (2 personnes) et des familles moyennes (4 à 6 personnes).

Par exemple, si la moitié des appartements sont occupés par des familles moyennes, un quart de la moitié par des familles de deux personnes et un quart par des personnes vivant seules, il y aura entre 88 et 120 personnes.

En utilisant des paramètres, si  $f$  est le nombre de familles moyennes (4 individus),  $a$  les personnes vivant seules et  $t$  les familles de deux personnes, le nombre total de personnes habitant dans l'immeuble peut être représenté l'expression algébrique :

$$T(f, a, t) = 4f + a + 2t$$

<sup>1</sup> En commençant en 2007 et en considérant que la consommation de gaz de 1993 à 2006 a été de 2500 milliards de mètres cubes chaque année en moyenne. Il en découle qu'il y aura 109.300 milliards de mètres cubes à la fin de 2006.